Méthodes de résolution itératives

AnaNum – Chapitre 5

I. Les méthodes itératives

On cherche à trouver la solution d'un système $Ax = b$ grâce à une suite de vecteur $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers la solution $\tilde{x}$.

$$Ax = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j + A_{ii}\boldsymbol{x_i} + \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j = b_i$$

```
fonction x = iterative (A, ite_max, epsilon, x [, ω])
tant que (non conv) faire      $n_{iter} < n_{iter_{max}}$ et $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| > \varepsilon$ ou $\|Ax^{(k)} - b\| > \varepsilon$

Jacobi
    pour i = 1 à n faire                                          Forme matricielle
      y(i) = $\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}}$          $(A = D + U + L)$
    finpour
    pour i = 1 à n faire                                x = D\(b - (L + U)x)
      x(i) = y(i)
    finpour

Gauss-Siedel
    pour i = 1 à n faire
      x(i) = $\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}}$          x = (D + L)\(b - Ux)
    finpour

Relaxation
    pour i = 1 à n faire
      x(i) = $\omega \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}} + (1 - \omega)x_i$    x = (D + ωL)\((1-ω)D - ωU)x + ωb)
    finpour
fintantque
```

Notations matricielle des méthodes

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \Leftrightarrow x^{(k+1)} = \underbrace{M^{-1}N}_{C}\,x^{(k)} + \underbrace{M^{-1}b}_{d} \Leftrightarrow \boxed{x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d}$$

II. Condition suffisante de convergence

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \tilde{x} \underset{\substack{\tilde{x}=C\tilde{x}+d \\ \text{par def}}}{=} C\left(x^{(k)} - \tilde{x}\right) = C^2\left(x^{(k-1)} - \tilde{x}\right) = C^{k+1}(x_0 - \tilde{x})$$

$$\left\|e^{(k+1)}\right\| = \left\|C^{k+1}(x_0 - \tilde{x})x_0 - \tilde{x}\right\| \leq \|x_0 - \tilde{x}\| \underbrace{\|\mathrm{C}\|^{k+1}}_{\to 0\ ?}$$

- La suite de vecteurs converge si il existe une norme telle que $\|\mathrm{C}\| < 1$.
- Si A est à diagonale dominante, Jacobi et Gauss-Seidel convergent
- Si A est symétrique définie positive, la relaxation converge pour $0 < \omega < 2$

III. Conditionnement et stabilité

$$A(x+\delta_x) = (b+\delta_b) \quad \Rightarrow \quad A\delta_x = \delta_b \quad \Rightarrow \quad \delta_b = A^{-1}\delta_x$$

$$\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\|\|A\|}_{cond(A)} \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} \qquad cond(A) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} \text{ bon si proche de 1, mauvais si } \gg 1$$

IV. Méthode du gradient

$$Ax = b \Leftrightarrow \quad \min_x \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho d \qquad \underset{\text{direction de descente}}{d = -(Ax-b)} \qquad \underset{\text{pas de descente}}{\rho = -\frac{d^T\left(Ax^{(k)} - b\right)}{d^T A d}}$$

V. Outils mathématiques

1. Matrice a diagonale dominante

$$A \text{ a diag. dominante } \Leftrightarrow \quad \forall\, i \quad |A_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_{ij}$$

2. Normes vectorielles

$$\boxed{\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$f(x)$ norme $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$ et $\forall x$ et $f(x) = 0 \; si \; x = 0$
$f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$
$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$
$\|x^T y\|_p \leq \|x\|_p \|y\|_q$ avec $\frac{1}{1} + \frac{1}{q} = 1$

3. Norme matricielles de type vectorielle : Frobenius

$$\boxed{\|A\|_F^2 = \sum_i \sum_j C_{ij}^2}$$

Pas sous-multiplicative ($\|AB\| \nleq \|A\|\|B\|$)

4. Norme matricielle d'opérateur

$$\boxed{\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |A_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |A_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \max_i \sqrt{\mu_i} \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$$

$$\|kA\| = |k|\|A\|$$
$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$
$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$